Introduction (1)

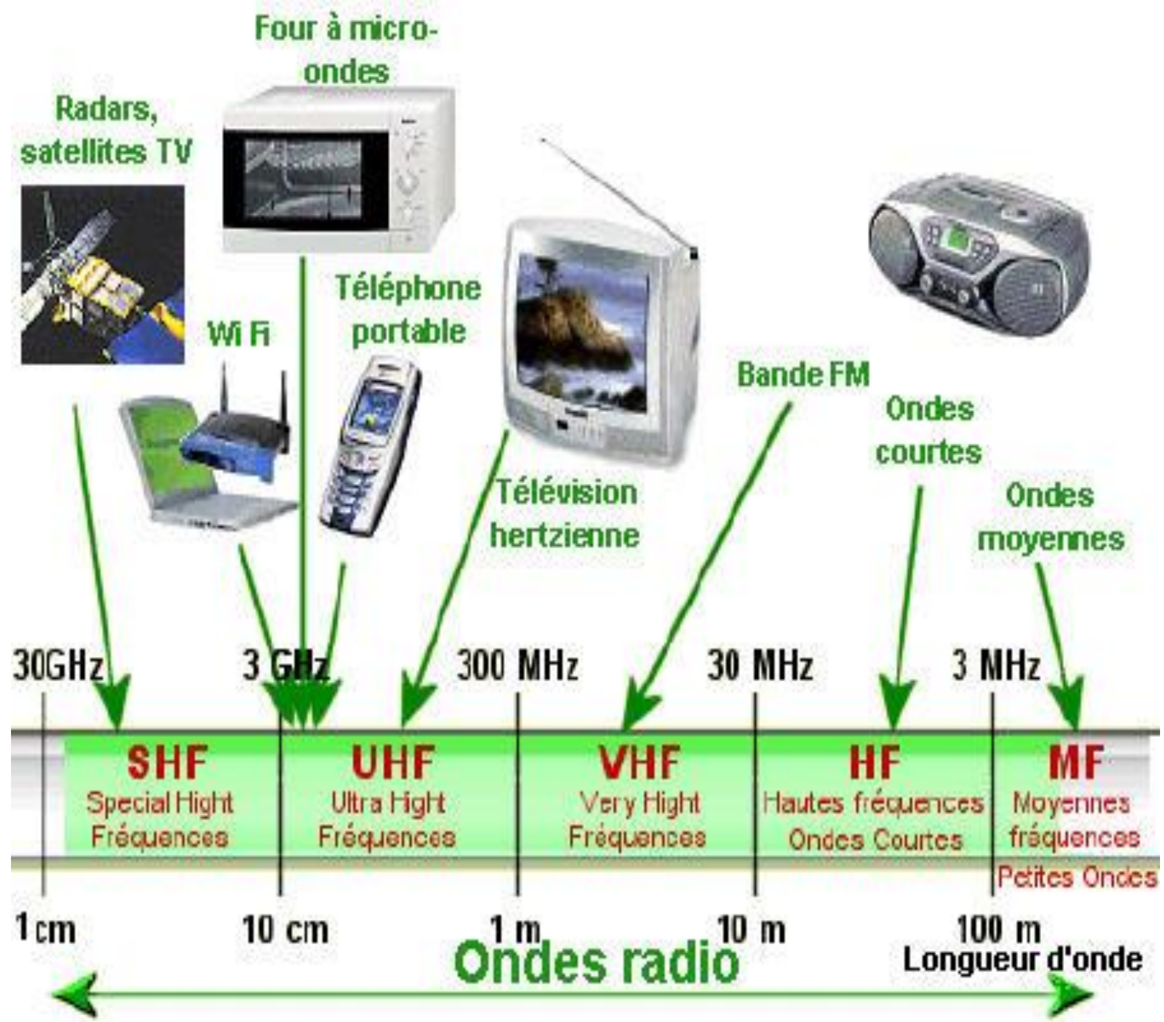
En physique, on regroupe sous l'appellation signal toute information dépendant du temps et/ou de l'espace. Cette double dépendance sous-entend qu'un **signal est susceptible de se déplacer dans l'espace et dans le temps**. Ce chapitre décrit quelques-unes des propriétés de la propagation de ces signaux, dans le cas où ceux-ci sont assimilables à des ondes.

Introduction (2)

Les ondulations sur un étang, la vibration d'une corde de guitare, le son doux d'une flûte, un tremblement de terre, les couleurs d'un arc-en-ciel sont des exemples **d'ondes**.

Une onde se manifeste quand **un système est perturbé par rapport à sa situation d'équilibre et quand cette perturbation peut se propager d'une région du système à une autre avec une vitesse donnée.**

Introduction (3)



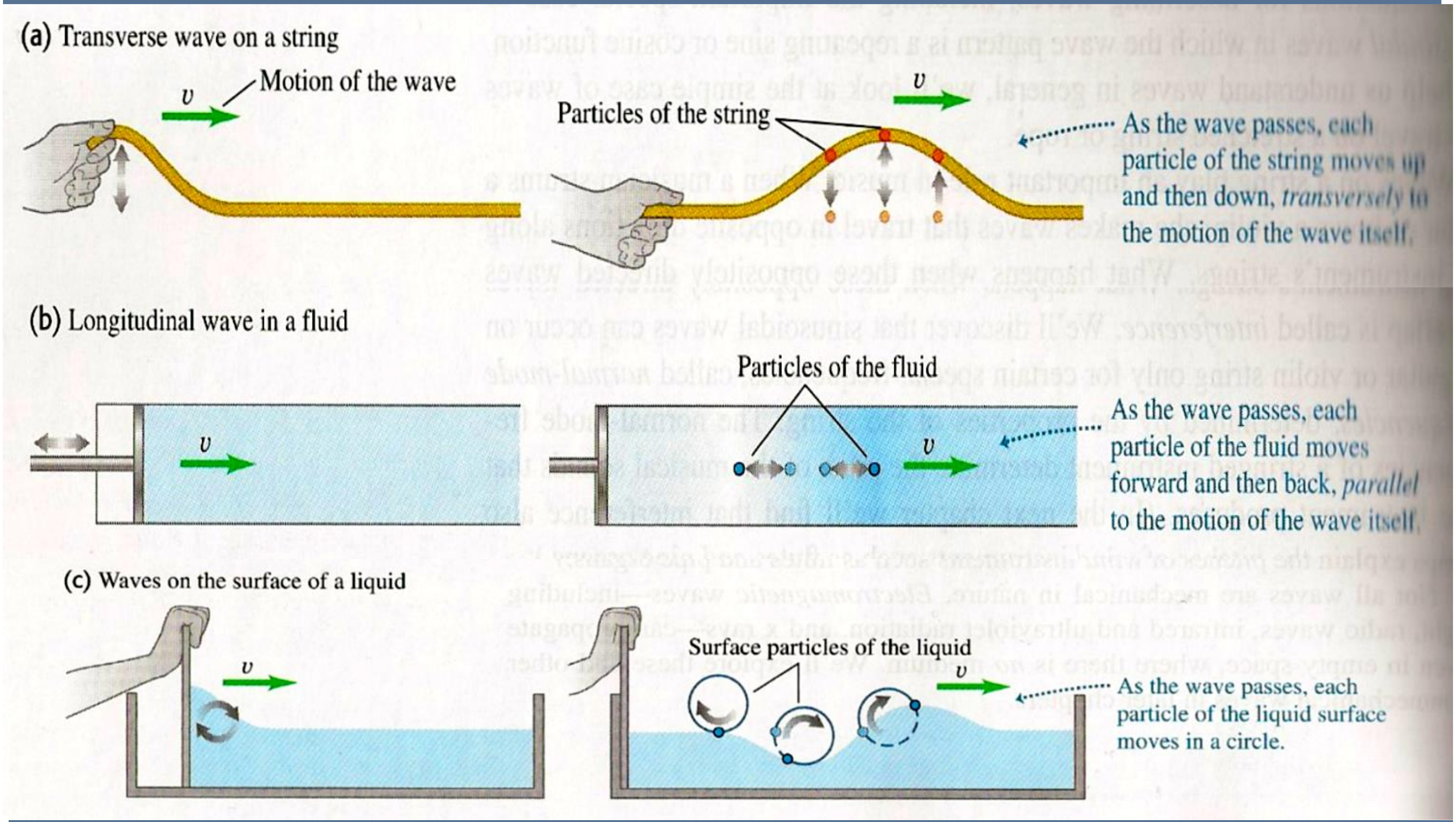
Modèle des ondes et définitions

Ondes mécaniques (1)

Dans cette catégorie, **les ondes se propagent dans un milieu matériel tel que l'air, l'eau ou les solides**. Le son ou les vagues à la surface de l'eau sont deux exemples familiers d'ondes mécaniques. Quand la perturbation se propage dans le milieu matériel, les particules constituant ce milieu subissent divers déplacements par rapport à leur position d'équilibre selon la nature de l'onde.

NB : L'onde, la perturbation, se propage dans le milieu mais ce dernier dans son ensemble ne se propage pas. Les particules du milieu oscillent autour d'une position d'équilibre, elles restent donc localisées autour de cette position. **Une onde transporte de l'énergie à partir de l'origine de la perturbation du milieu mais ne transporte pas de matière.** La matière reste localisée autour de sa position initiale, **l'onde se propage, la matière oscille.**

Ondes mécaniques (2)



Ondes électromagnétiques

Du domaine des ondes radio, du visible aux rayons X ce sont des oscillations auto-entretenues du champ électromagnétique. **Les ondes électromagnétiques ne requièrent aucun milieu matériel pour se propager et peuvent donc voyager dans le vide**. La lumière du soleil se propage dans le vide et met environ 8 mn pour apporter son énergie sur Terre. Les ondes électromagnétiques seront étudiées en détail dans le cours d’ Electromagnétisme et optique physique (2ème année).

Ondes de matière

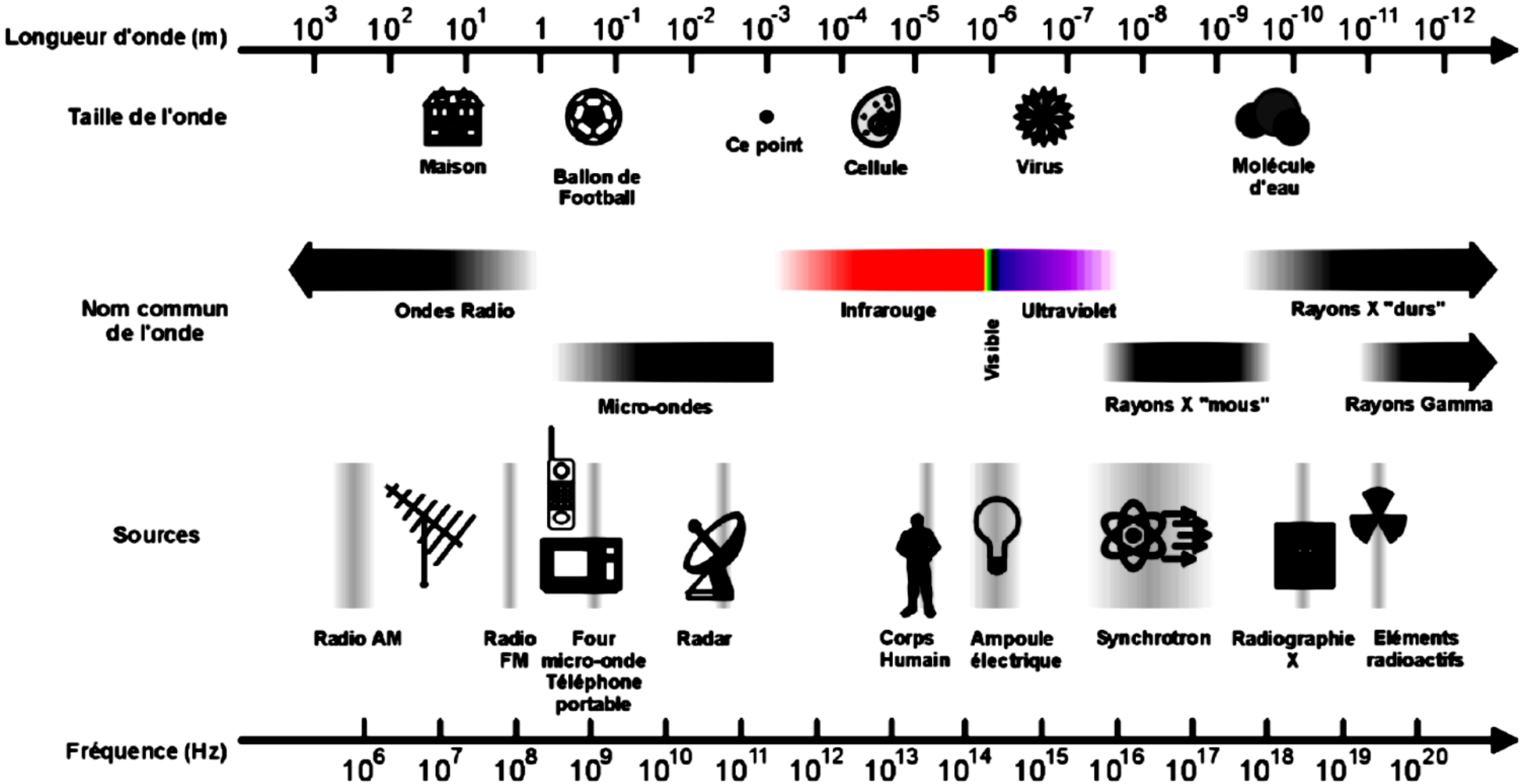
Ces ondes vous sont certainement moins familières. Elles sont associées aux particules du monde atomique et subatomique comme le proton, le neutron, l'électron, le quark etc. Ces particules peuvent exhiber des propriétés physiques qui sont caractéristiques des ondes comme les interférences et la diffraction. Nous parlerons des ondes de matière dans le chapitre consacré à l'introduction au monde quantique.

Propriété essentielle

Quelle que soit la nature physique de l'onde, il faut retenir **la propriété essentielle suivante commune à toutes les ondes :**

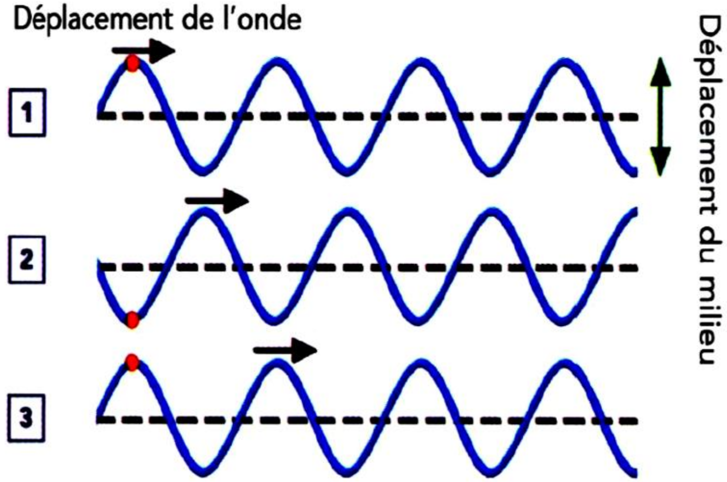
Une onde transporte de l'énergie dans l'espace à partir de l'origine de la perturbation mais ne transporte pas de matière.

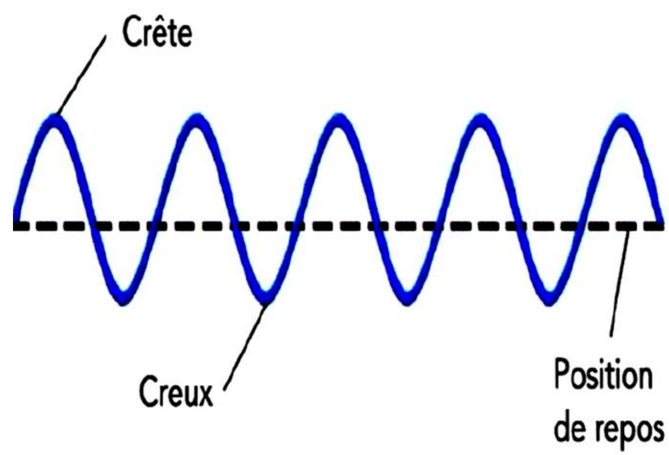
Exemples d'ondes



Ondes transversales

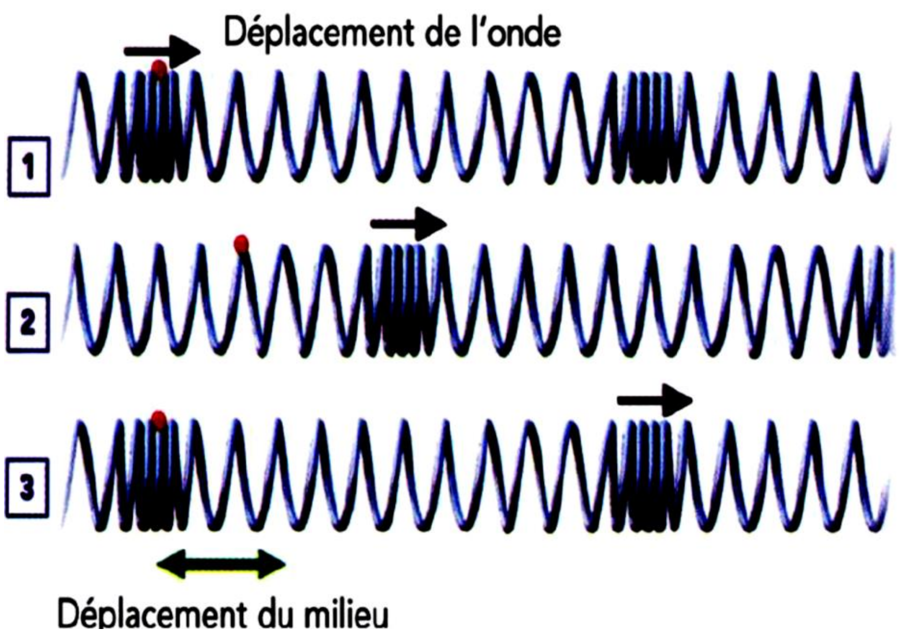
Dans ces dernières, les particules du milieu, pour les ondes mécaniques, ont **un mouvement perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.** Les ondes électromagnétiques (dont la lumière est une composante) sont aussi transversales car le champ électromagnétique oscille de façon perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde

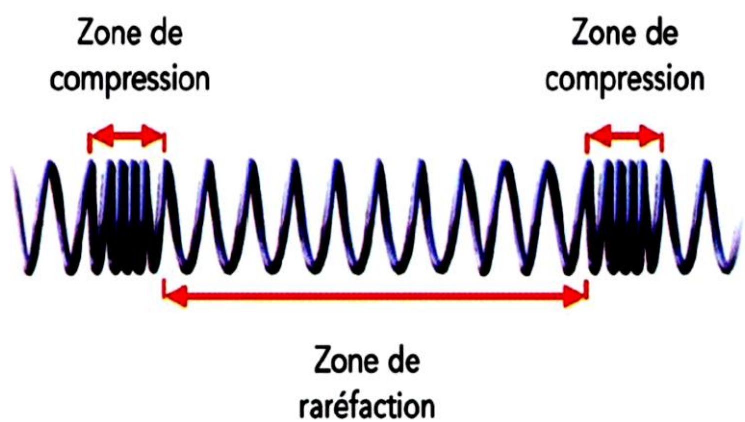




Ondes longitudinales

Dans ces dernières, les particules du milieu, pour les ondes mécaniques, ont **un mouvement parallèle par rapport à la direction de propagation de l'onde**.





Notion de spectre (1)

L'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné est appelée **analyse spectrale**.

Le résultat de l'analyse spectrale est :

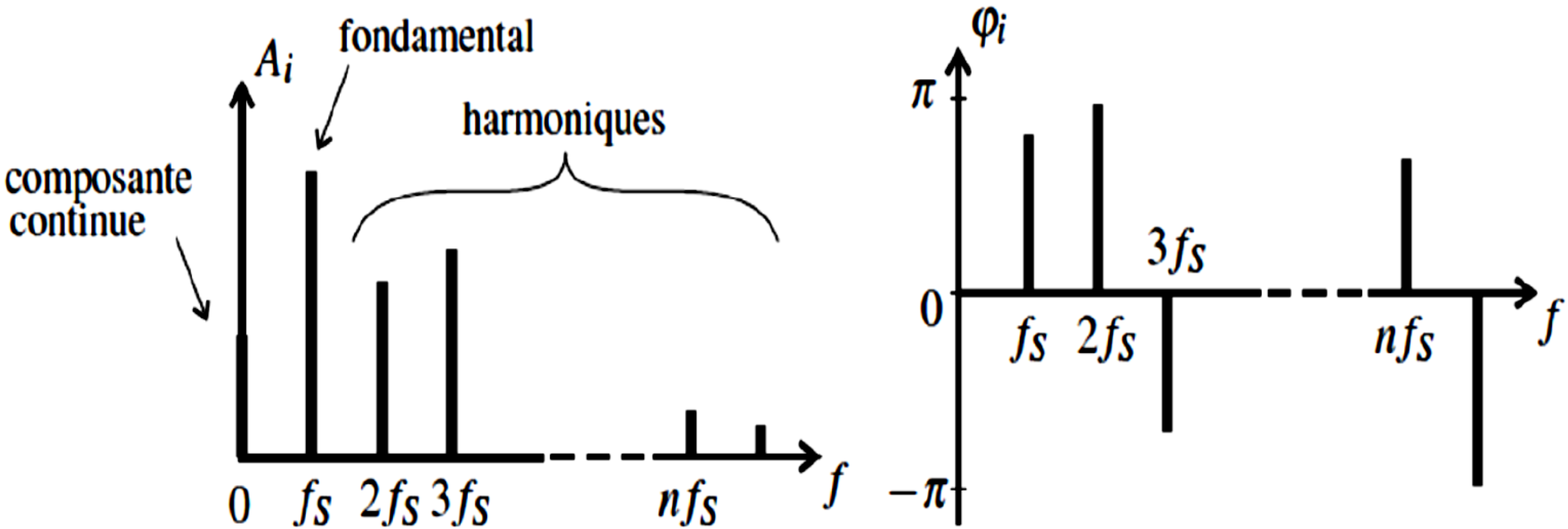
- **la liste des fréquences f_i des composantes sinusoïdales contenues dans le signal**
- **l'amplitude A_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i**
- **la phase initiale φ_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i.**

Notion de spectre (2)

- La représentation graphique des A_i en fonction des f_i constitue **le spectre d'amplitude**. Elle permet de visualiser le contenu fréquentiel du signal.
- On préfère parfois représenter les carrés des amplitudes A_i^2 en fonction des fréquences f_i pour visualiser la contribution de chaque composante à l'énergie du signal, **c'est le spectre d'énergie**.
- La représentation des phases initiales φ_i en fonction des f_i est **le spectre de phase.** Ce spectre est plus difficilement interprétable car les phases initiales, à la différence des amplitudes dépendent du choix de l'origine des temps qui est arbitraire.

Notion de spectre (3)

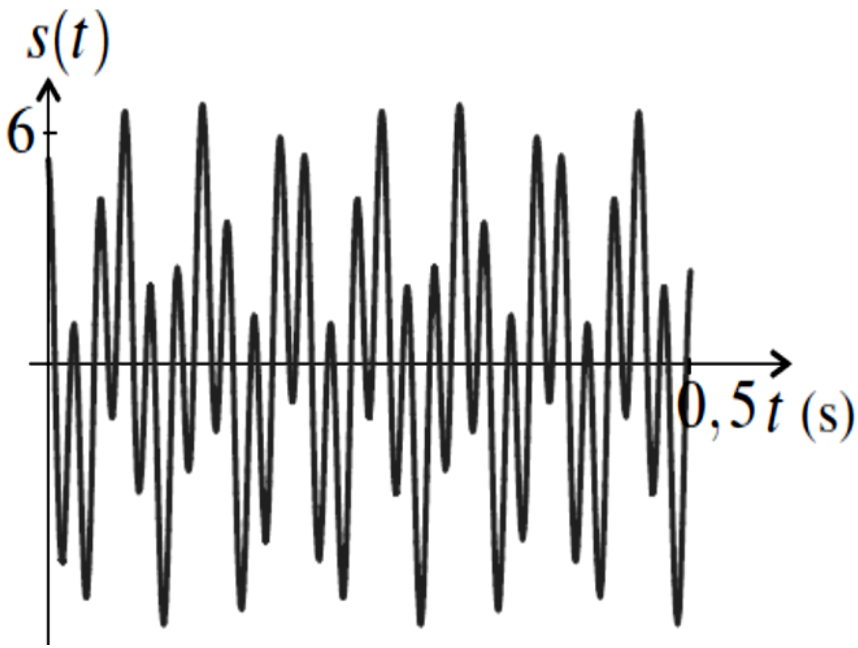
$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

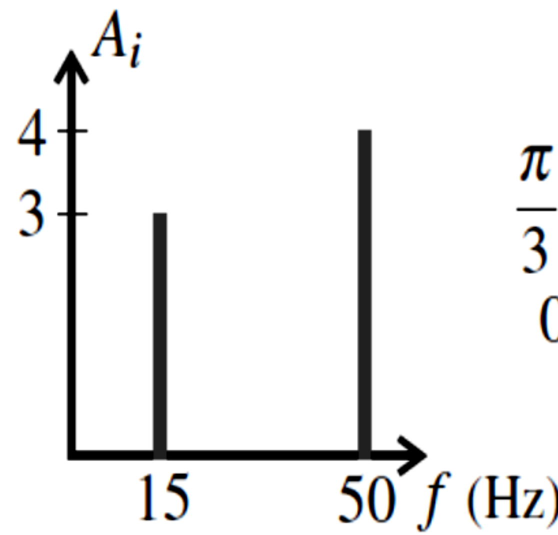


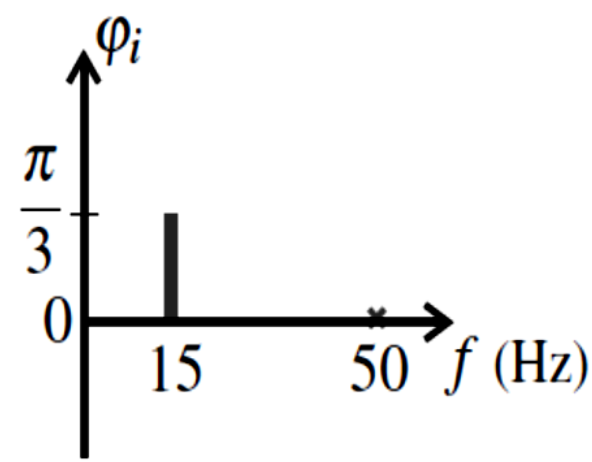
Notion de spectre (4)

Exemple : le signal $s(t)$ contient les fréquences $f_1 = 15\ \text{Hz}$ et $f_2 = 50\ \text{Hz}$. Son spectre, d'amplitude et de phase est représenté sur la figure suivante.

$$s(t) = 3\cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos(100\pi t)$$







Phénomènes de Propagation

Vitesse de propagation (1)

La vitesse de déplacement de la perturbation est appelée vitesse de propagation ou encore célérité. On la note c. La vitesse de propagation d'une onde dépend des propriétés physiques du milieu dans lequel elle se propage. La vitesse d'une onde sur une corde, pour peu que **les amplitudes de la déformation ne soient pas trop importantes**, est donnée par :

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}$$

F_T: Tension de la corde en N

$\mu = m/\ell$: Masse par unité de longueur en $\mathrm{kg.m^{-1}}$

Vitesse de propagation (2)

Analyse qualitative de l'expression de la vitesse:

Quand la tension augmente, la vitesse augmente, ce qui paraît raisonnable, et plus la masse linéique de la corde est grande, plus il y a de l'inertie dans la corde et plus la vitesse de propagation de l'onde sera lente comme attendue. D'une façon plus générale, la vitesse d'une onde mécanique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$v = \sqrt{\frac{\text{Force de rappel pour ramener le système à l'équilibre}}{\text{terme d'inertie qui résiste au retour à l'équilibre}}}$$

Onde progressive (1)

Une onde est dite progressive lorsque la perturbation se propage dans le milieu de propagation sans se déformer.

C'est une onde qui propage dans une direction et un sens bien déterminé

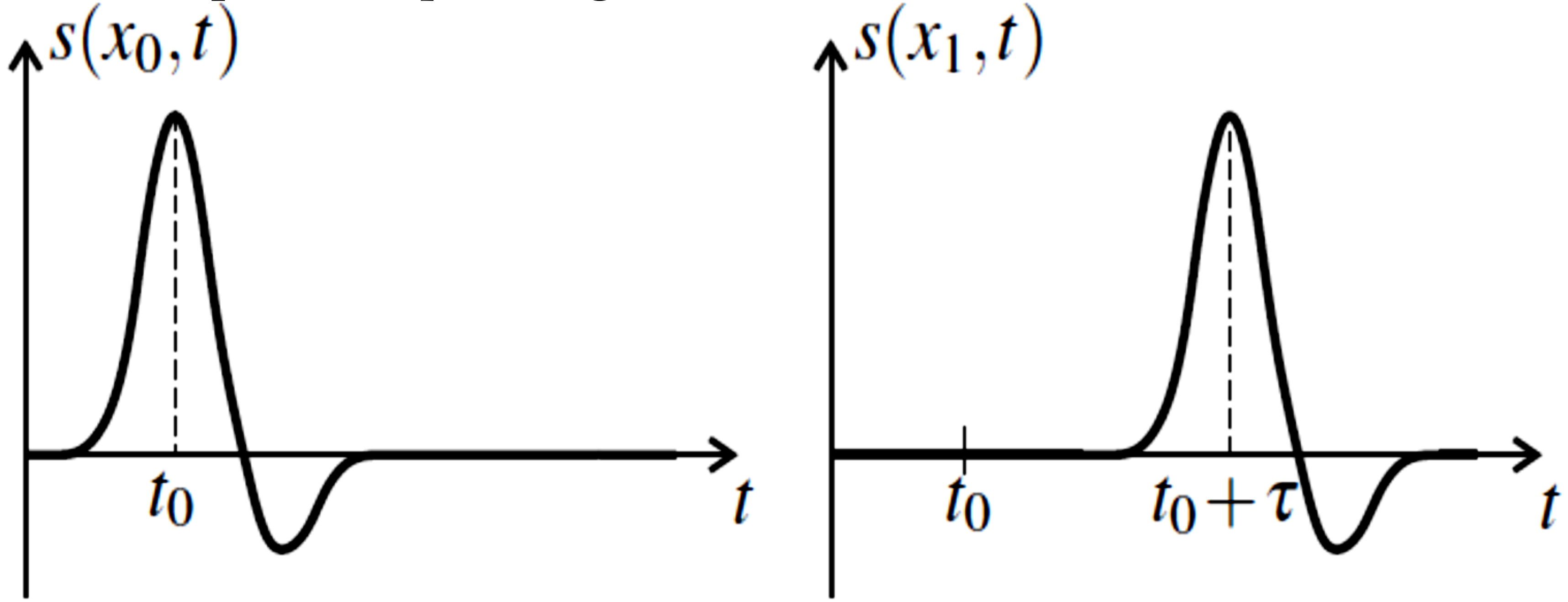
Onde progressive (2)

Pour **modéliser le phénomène de propagation** on introduit l'onde progressive à une dimension qui se propage **sans atténuation ni déformation** à la vitesse constante c dans la direction d'un axe (Ox). Cette onde représentée mathématiquement par une **fonction d'onde** $s(x,t)$ de variables : la coordonnée x selon (Ox) et le temps t.

$s(x,t)$ est la valeur du signal, mesurée à l'abscisse x, à l'instant t. On considère le cas où l'onde progresse dans le sens positif de (Ox) et le cas où elle progresse dans le sens négatif de (Ox).

Onde progressive (3)

On considère une onde progressive se propageant avec la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens positif de cet axe, c'est-à-dire vers les x croissants. La figure suivante représente le signal mesuré à une abscisse x_0, en fonction du temps, ainsi que le signal mesuré à une abscisse $x_1 > x_0$



à l'abscisse x_0 | à l'abscisse $x_1 > x_0$

Onde progressive (4)

Les valeurs observées en x_0 au cours du temps sont observées aussi en x_1 mais avec un retard τ. Ceci s'écrit par : $s(x_1, t) = s(x_0, t - \tau)$
La durée τ est celle qu'il faut à l'onde pour se propager de x_0 à x_1.
La vitesse de propagation étant c, on a :

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

Il vient donc

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right)$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi quand $x_1 < x_0$. Elle s'écrit en effet :

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t + \frac{x_0 - x_1}{c}\right)$$

Onde progressive (5)

et signifie alors que l'on trouve en x_1 le même signal qu'en x_0 avec une avance de

$$\frac{x_0 - x_1}{c}$$

Si on écrit $s(x_1, t)$ en posant $x_0 = 0$ et $x_1 = x$, valeur quelconque, on trouve

$$s(x,t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable $t - x/c$. Pour simplifier on le note $f(t - x/c)$.

Onde progressive (6)

- Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) **dans le sens positif de cet axe, sans atténuation, ni déformation** est de la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)}}$$

où f est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

Onde progressive (7)

- Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) **dans le sens négatif de cet axe**, **sans atténuation, ni déformation** est de la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)}}$$

où g est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

Onde progressive (8)

Soit une onde se propageant d'un point O à un point M.

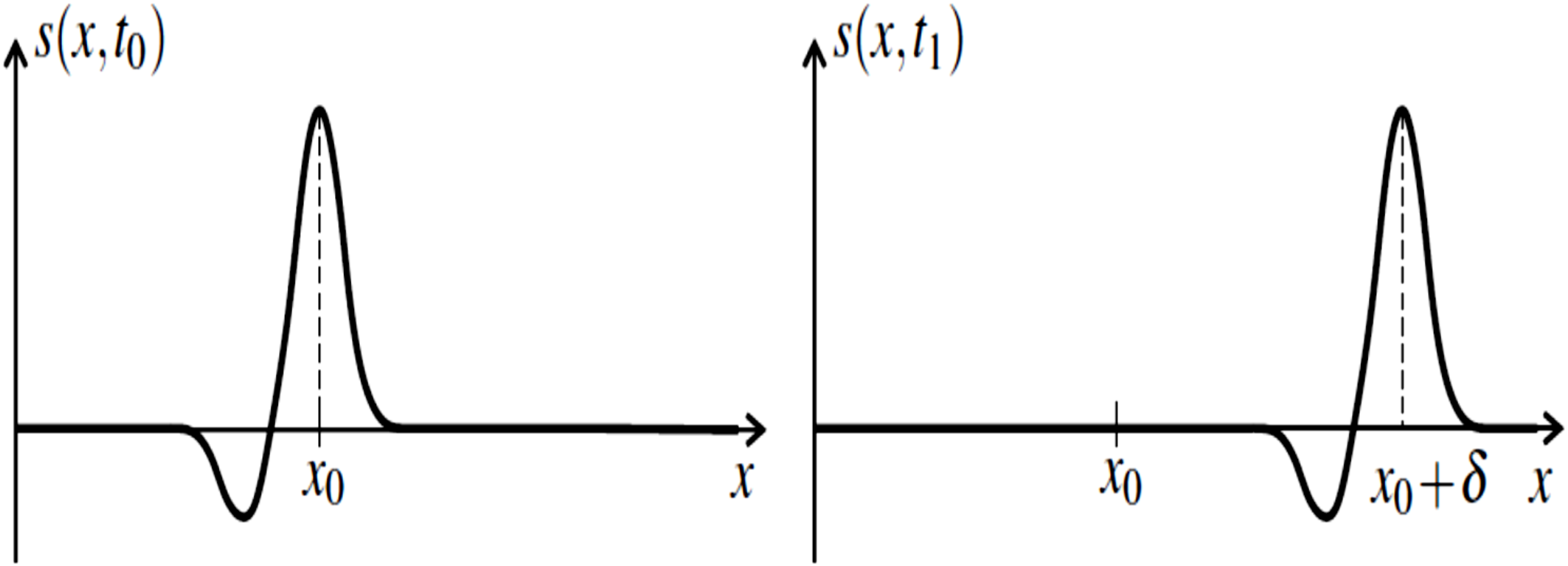
La perturbation $S(x,t)$ d'un point M d'abcisse x à un instant t est la même que celle qu'avait le point d'origine O à l'instant $t - x/v$, x/v mesurant la durée mise par l'onde pour parcrourir la distance OM soit:

$$S(x,t) = f_{x=0}(t - x/v) \Big\} \Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } +x$$

$$S(x,t) = g_{x=0}(t + x/v) \Big\} \Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } -x$$

Onde progressive (9)

La figure suivante représente les valeurs du signal à deux instants différents t_0 et $t_1 > t_0$ pour la même onde que sur la figure précédente.



à l'instant t_0 — à l'instant $t_1 > t_0$

Onde progressive (10)

Entre les instants t_0 et t_1, l'onde qui progresse dans le sens positif de l'axe (Ox) se déplace d'une distance δ. Ainsi la valeur observée à l'instant t_0 en x est observée à l'instant t_1 en $x + \delta$:

$$\boxed{\boldsymbol{s(x, t_0) = s(x + \delta, t_1)}}$$

L'onde se propage à la vitesse c donc on a : $\delta = c(t_1 - t_0)$

Il vient ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x, t_0) = s(x + c(t_1 - t_0), t_1)}}$$

Onde progressive (11)

Elle est aussi valable si $t_1 < t_0$.
Si l'on écrit en posant $t_0 = t$, instant quelconque et $t_1 = 0$, elle devient alors

$$s(x,t) = s(x - ct, 0)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable $x - ct$.
Pour simplifier l'écriture, on le note $F(x - ct)$.

Onde progressive (12)

❑ Ainsi une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) **dans le sens positif de cet axe, sans atténuation, ni déformation** est de la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = F(x - ct)}}$$

où F est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

Onde progressive (13)

❑ Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) **dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation, ni déformation** est de la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = G(x+ct)}}$$

où G est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

Onde progressive (14)

Soit une onde se propageant d'un point O à un point M.

A un instant t, la perturbation $S(x,t)$ d'un point M d'abcisse x est la même que celle qu'avait le point d'abcisse $(x-vt)$ à l'instant initial $t=0$ soit:

$$S(x,t)=f_{t=0}(x-vt) \Big\} \Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } +x$$

$$S(x,t)=g_{t=0}(x+vt) \Big\} \Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } -x$$

Onde progressive (15)

Remarque: L'expression mathématique des fonctions f et g dépend de la forme de l'onde qui se propage (forme triangulaire, rectangulaire, tordue etc…). Dans ce cours, nous allons nous consacrer aux **formes sinusoïdales (ou harmoniques, les deux termes sont synonymes)**. En effet, les fonctions harmoniques jouent un rôle central en mathématiques et en physique comme nous le verrons.

Onde progressive (16)

Une onde se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens positif peut s'écrire de deux manières :

$$\boldsymbol{s(x,t) = f(t - x/c) = F(x - ct)}$$

Si l'on connaît la fonction f, on trouve la fonction F en posant $t = 0$ dans l' équation ci- dessus : $\boldsymbol{F(x) = f(-x/c)}$

Si l'on connaît la fonction F, on trouve la fonction f en posant $x = 0$ dans l'équation ci- dessus : $\boldsymbol{f(t) = F(-ct)}$

Dans le cas d'une onde se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens négatif, on obtient la même onde avec les deux formules $g(t + x/c)$ et $G(x + ct)$ si

$$\boldsymbol{G(x) = g\left(\frac{x}{c}\right)} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{g(t) = G(ct)}$$

Onde progressive (17)

Exercice d'application

Une onde se propage selon (Ox) positif à la vitesse $c = 3\,m.s^{-1}$. À $t = 0$, elle est décrite par :

$$\begin{cases} F(x) = 2\sin(2\pi x) \;\; pour\, 0 \leq x \leq 1 \\ \qquad F(x) = 0 \quad pour\, x > 1 \end{cases}$$

1. Représenter $F(x)$
2. Déterminer le signal $s(x,t)$ en x et à la date t .
3. Représenter $s(x,2)$ et $s(3,t)$.

Onde progressive sinusoïdale (1)

On parle d'onde sinusoïdale ou encore d'onde harmonique lorsque le signal mesuré en tout point est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω, indépendante du point. Une telle onde a la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = A(x)\cos\left(\omega t + \varphi(x)\right)}}$$

$A(x)$ est l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x et $\varphi(x)$ la phase initiale de l'onde en même point. On note $A_0 = A(0)$ et $\varphi(0) = \varphi_0$, l'amplitude et la phase initiale à l'origine O de l'axe (Ox).

Onde progressive sinusoïdale (2)

Une onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) peut s'écrire :

$$s(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

où T est la période temporelle et λ la période spatiale appelée longueur d'onde, k est appelé vecteur d'onde. A_0 est l'amplitude de l'onde et φ_0 sa phase initiale à l'origine

L'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :

- du temps (pour x fixé) avec une pulsation temporelle ω,
- de la variable spatiale (pour t fixé), avec une pulsation spatiale k.

On parle de la **double périodicité spatio-temporelle** de l'onde.

Onde progressive sinusoïdale (3)

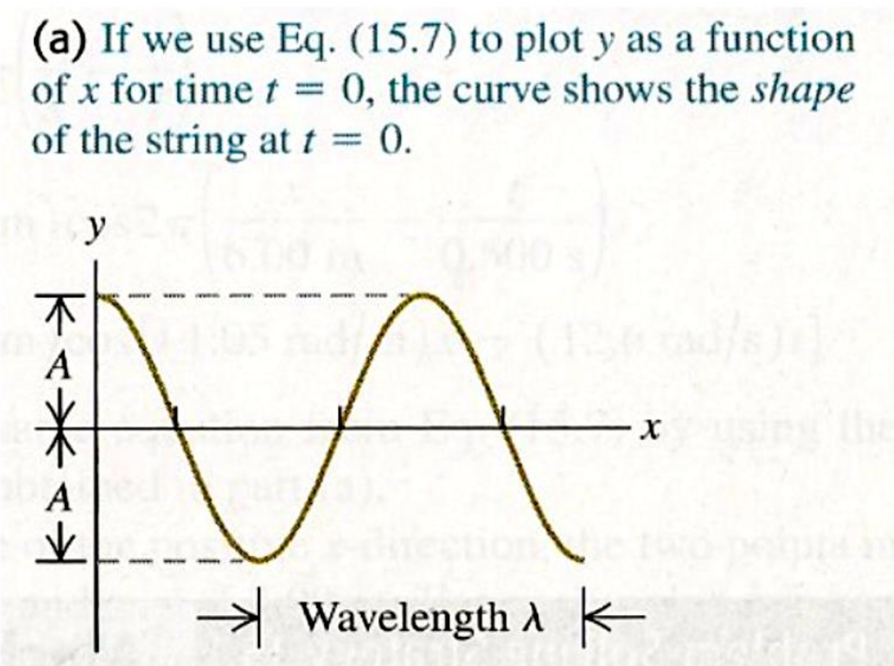
$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ nombre d'onde en m^{-1}

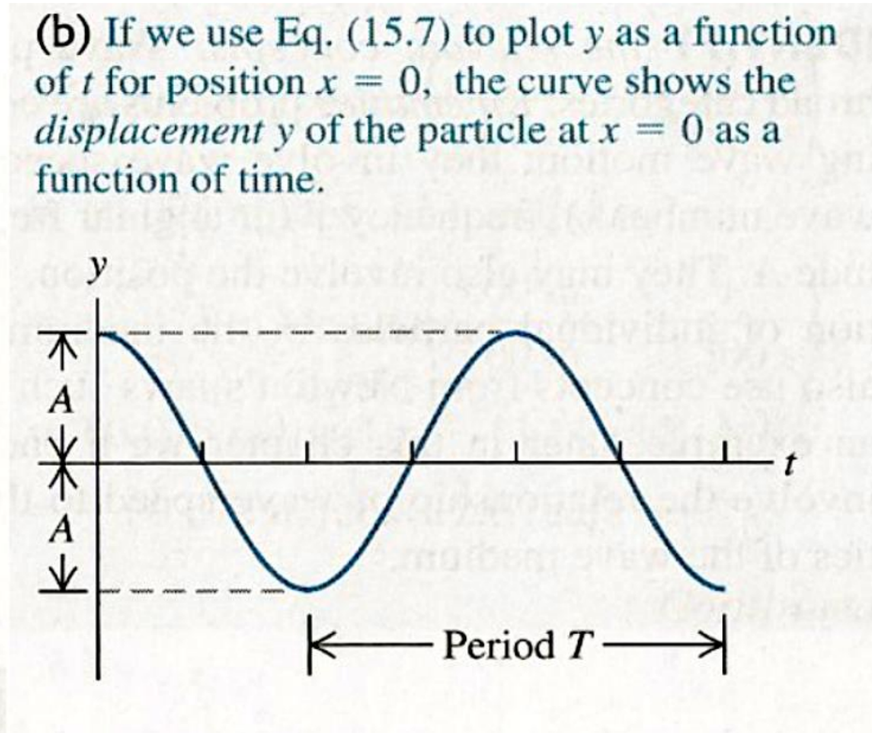
$\omega = v\,k$ pour une onde périodique

Périodicité temporelle	Périodicité spatiale
Période T en s	Longueur d'onde λ en m
Pulsation $\omega = 2\pi/T$ en rad.s^{-1}	Nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ en m^{-1}
$v = \lambda/T$ $v = \omega/k$	

Onde progressive sinusoïdale (4)

La figure suivante (a) représente l'allure de la corde $y(x,0) = A\cos(kx)$ à l'instant $t = 0$, on a fait une photo de la corde à cet instant. Par contre, la courbe (b) représente le déplacement d'une particule de la corde au cours du temps située à la position $x = 0$, c'est-à-dire la fonction $y(0,t) = A\cos(\omega t)$





Onde progressive sinusoïdale (5)

Dans l'expression $s(x,t) = A\,cos(kx \pm \omega t)$ la grandeur $(kx \pm \omega t)$ s'appelle **la phase de l'onde**. Elle joue le rôle d'une grandeur angulaire. L'ensemble des points de l'espace qui à un instant donné ont la même valeur de phase $(kx \pm \omega t)$ s'appelle un **front d'onde**.

Pour une onde unidirectionnelle, les fronts d'onde sont les plans perpendiculaires à l'axe x . Nous en reparlerons en optique.

Onde progressive sinusoïdale (6)

- **Deux points en lesquels l'onde est en phase sont séparés le long de la direction de propagation (Ox) d'un nombre entier de fois la longueur d'onde.**

$$\boxed{x_1 - x_0 = m\lambda}$$

- **Deux points en lesquels l'onde est en opposition de phase sont séparés le long de la direction de propagation (Ox) d'un nombre entier de fois la longueur d'onde plus une demi-longueur d'onde.**

$$\boxed{x_1 - x_0 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Ordres de grandeurs des fréquences pour divers types d'ondes

Ondes acoustiques (1)

N'importe quelle source (objet) qui vibre dans un milieu matériel (par exemple un instrument de musique) est la source d'une onde acoustique donc de la production d'un son que notre oreille et notre cerveau sont capables de capter, d'enregistrer. La fréquence du son dépend de la fréquence de vibration de la source. L'oreille humaine est capable de percevoir des sons dont la fréquence est comprise en gros entre 20 Hz et 20 000 Hz. Bien sûr ce domaine varie d'une personne à l'autre et en général devient plus étroit en vieillissant, ainsi les personnes âgées perçoivent peu les fréquences au-delà de 10 000 Hz.

La vitesse de propagation du son dépend des propriétés physiques du milieu dans lequel il se propage. Par la relation $\lambda = V/f$, la longueur d'onde dépend du milieu dans lequel l'onde se propage.

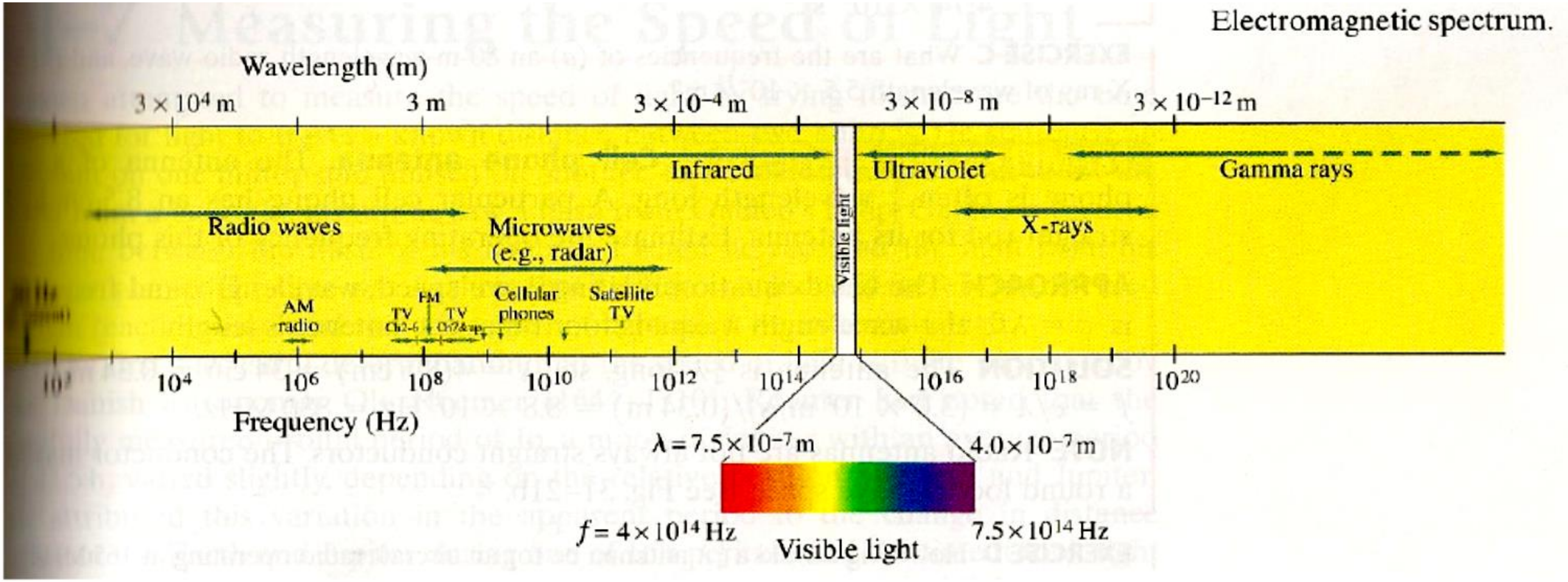
Ondes acoustiques (2)

Attention, **la fréquence d'une onde est une grandeur intrinsèque (propre à l'onde) et ne dépend pas du milieu considéré.**

TABLE 16–1 Speed of Sound in Various Materials (20°C and 1 atm)

Material	Speed (m/s)
Air	343
Air (0°C)	331
Helium	1005
Hydrogen	1300
Water	1440
Sea water	1560
Iron and steel	≈ 5000
Glass	≈ 4500
Aluminum	≈ 5100
Hardwood	≈ 4000
Concrete	≈ 3000

Ondes électromagnétiques



L'œil n'est capable de voir qu'une infime partie du spectre des ondes électromagnétiques (que l'on appelle justement lumière) compris approximativement entre 400 nm pour le violet/bleu et 750 − 800 nm pour le rouge/ infrarouge. Dans le vide cela correspond à des fréquences comprises entre $4\ \times 10^{14}$ Hz et $7{,}5 \times 10^{14}$Hz . Ces valeurs sont infiniment plus importantes que les fréquences sonores audibles pour l'oreille humaine.

Vitesse et accélération des particules dans une onde

Equation d'onde (1)

Les résultats que nous allons obtenir dans ce paragraphe ne sont pas à connaître dans le cadre du programme de MPSI. Ils le seront en MP. Mais l'équation d'onde que nous allons établir est tellement importante que nous allons commencer à en parler. Nous allons reprendre l'exemple de la propagation d'ondes transversales sur une corde (suivant les x positifs).

A un instant donné et à une position donnée, la position transverse d'une « particule » sur la corde est donnée par la fonction d'onde $y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t)$. La dérivée par rapport au temps de $y(x,t)$ donne la vitesse transversale d'une particule de la corde notée $v_y(x,t)$. Attention, il ne faut pas confondre cette vitesse avec la vitesse v de propagation de l'onde sur la corde .

Equation d'onde (2)

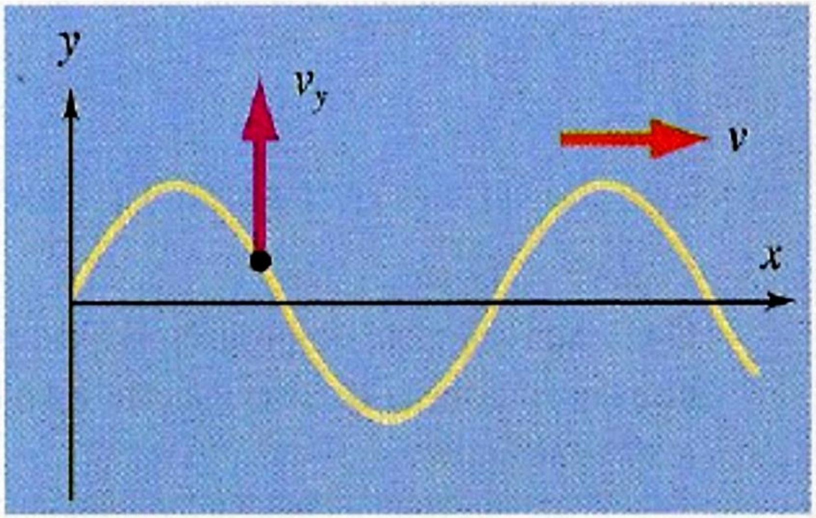


Figure 2.16▲
La vitesse d'une particule sur une corde, donnée par $\partial y/\partial t$, est perpendiculaire à la vitesse de propagation de l'onde v.

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

Si l'on dérive deux fois $y(x,t)$ par rapport au temps, on obtient cette fois l'accélération d'une particule de la corde :

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t)$$

On peut aussi calculer la dérivée première de $y(x,t)$ par rapport à x , ce qui représente la pente de la corde et la dérivée seconde de $y(x,t)$ par rapport à x qui représente alors la courbure de la corde :

Equation d'onde (3)

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x,t)$$

Si l'on se rappelle que $\omega = k$v, on voit que :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}}$$

Equation d'onde (ou de d'Alembert)

Equation d'onde (4)

Cette dernière équation, dite équation d'onde ou équation de d'Alembert est une équation très importante de la physique. On peut dire qu'elle joue pour les ondes le même rôle que le principe fondamental de la dynamique pour les particules. Ce résultat, obtenu dans le cas particulier de la corde, est tout à fait général. En effet, n'importe quelle fonction d'onde $S(x,t) = f(x - vt)$ où $S(x,t) = g(x + vt)$ vérifie l'équation d'onde. Cette dernière est donc aussi valable pour les ondes acoustiques longitudinales et elle décrit aussi la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, donc aussi de la lumière, comme vous le verrez en détail en classe de MP. D'un point de vue mathématique, c'est une équation différentielle d'ordre 2 et linéaire. **Le fait que cette équation soit linéaire joue un rôle important dans le principe de superposition comme nous le verrons dans le prochain chapitre.**